作行变换只关注系数，将系数提取出来

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots & a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots & a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots & a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix}$，常数项 $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

增广矩阵 $(A\ b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \\ a_{m1} & & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，则原线性方程组记作 $Ax=b$

线性方程组的行变换同样定义矩阵的行变换.

行变换的目标：对增广矩阵 $(A\ b)$ 而言.

① 所有非零行在零行的上面.

② 对某一非零行，称最左边的非零元为主元
(leading coefficient or pivot)
第 i 行的主元严格比第 i+1 行的靠左.

定义（行阶梯型 row echlon form）

矩阵满足条件①，②

定义（最简行阶梯型 reduced row echlon form）（rref）

矩阵满足条件①，②．且主元所在列其他元素均为0，主元本身为1．

定理：矩阵A可通过行变换变成 rref，且该 rref 只依赖于A，不依赖于行变换的选取．（记作 $\mathrm{rref}(A)$）

证明："行变换成 rref"．

归纳法，对列作归纳．

$n=1$ 时 $m\times 1$ 矩阵 A $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

若 $a_{11}=a_{21}=\cdots=a_{m1}=0$，已经是 rref $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

若 $a_{11}=a_{21}=\cdots=a_{(k-1)1}=0$，$a_{k1}\neq 0$．

则（E1）将 a_{k1} 换到第一行，

（E2）第一行乘以 $(a_{k1})^{-1}$．主元变为1．

（E3）将第一行以下变为0．

$\mathrm{rref}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

假设对 n 成立，对 $(n+1)\times m$ 矩阵 A.

$A=(B, y)$，　　B $(n\times m)$ 矩阵.

B 可由行变换得到 rref B'，将同样变换作用在 A 上

得到 $A'=(B', y')$

如果 B' 没有非零行，则 A' 已经是 rref.

如果 B' 从第 $(l+1)$ 行开始是零行

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & 0 & * & 0 & & y'_1 \\ & & & 1 & * & 0 & & \vdots \\ & & & & & 1 & * \ * & y'_l \\ \hline & & & 0 & & & & y'_{l+1} \\ & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & y'_m \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow l\text{ 行} \\ \\ y \\ \\ \end{array}$$

对 $\begin{pmatrix} y'_{l+1} \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix}$ 用 $n=1$ 的结论，可作行变换得到

rref，同时对 B' 作.

由于行变换不改变零矩阵，所以不改变 B'

情形1，　rref $\begin{pmatrix} y'_{l+1} \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A'$ rref

情形2，$\operatorname{rref}\begin{pmatrix} y'_{l+1} \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

作(E3)将第$(l+1)$行加到第$1,2,\cdots l$行，将$y'_1\cdots y'_l$变为0，（消去$y_1,\cdots y_l$）也不改变B'，$\Rightarrow$ 此时A'是rref.

只依赖于A.（之后）

由rref写出所有解.

定义：对线性方程组的系数矩阵A，记rref(A)中pivots对应的未知元为主元(principal unknowns).其余未知元为自由元(free unknowns)

例如：

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} x_1 & x_2 & & & x_5 & \end{matrix} \end{array} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix}$$

$x_1\ x_2\ x_5$ 是主元，x_3, x_4, x_6 是自由元

$b_4 \neq 0$ 或者 $b_5 \neq 0 \Rightarrow$ 方程组 $Ax=b$ 无解.

$b_4=0$ 且 $b_5=0$，则 x_3, x_4, x_6 取定任意实数时.

主元 由方程组唯一确定

$x_1 = b_1 - 3x_3 - 5x_4 - x_6$,

$x_2 = b_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_6$

$x_5 = b_3$

且此时数组 $(x_1 \cdots x_6)$ 满足原方程.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \\ b_3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \cdot \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

定理：对于方程 $Ax=b$. 用行变换将 (A, b)

转化为 rref. $(\bar{A}, \bar{b})$，则

方程有解 $\Leftrightarrow$ 没有方程 $0=\bar{b}_k$，且 $\bar{b}_k \neq 0$.

方程有解时，自由元可任意取值，且自由元的每一组取值唯一决定了一组解.

解的结构

定义：$Ax=0$ 称为齐次线性方程组.

定理：$\{x \mid Ax=0\}$ 在加法和数乘下封闭.

证明：① 由 rref 求出解的一般表达形式

$x_{k_1}, \cdots x_{k_s}$ 为自由元,

则解 $x = x_{k_1}\cdot \underset{v_1}{\begin{pmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{pmatrix}} + x_{k_2}\cdot \underset{v_2}{\begin{pmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{pmatrix}} + \cdots$

$+ x_{k_s}\cdot \underset{v_s}{\begin{pmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{pmatrix}}$, $v_1, v_2, v_3 \cdots, v_s$ 是某些常向量,

$x_{k_1}, \cdots x_{k_s}$ 任取

易知加法、数乘之后仍是此形式

(称为 $v_1, v_2, \cdots v_s$ 的线性组合)

线性组合经过加法和数乘之后仍为线性组合.

且任一线性组合可由加法和数乘复合得到

② 根据 $A(x+y) = Ax + Ay$,

$A(c\cdot x) = c\cdot(Ax)$

非齐次 $Ax=b$,

例子中: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \\ b_3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{pmatrix}$

$+ x_6\begin{pmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{pmatrix}$

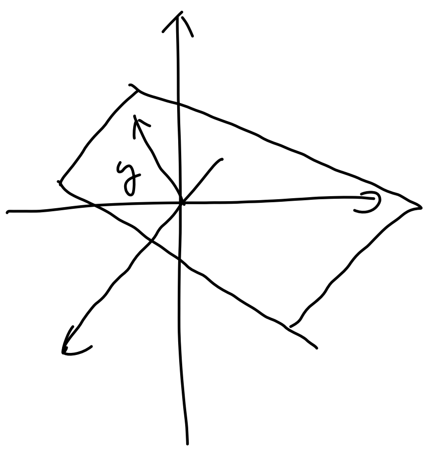
特解. $x_3 = x_4 = x_6 = 0$.

定理：$Ax=b$ 有某一解（特解）$\tilde{x}$，则 $Ax=b$ 的所有解均可唯一表达为 $x=y+\tilde{x}$，其中 y 是 $Ay=0$ 的解。

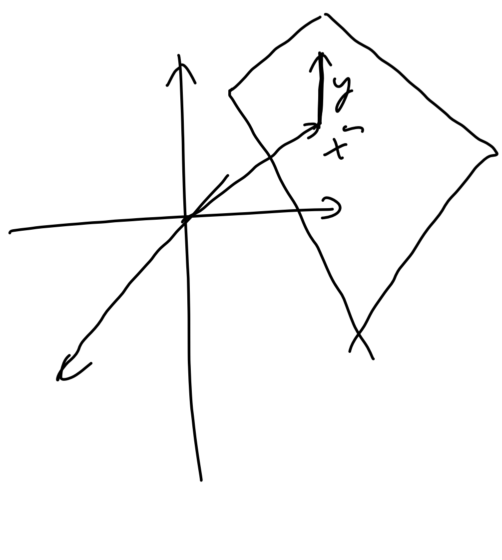
证明：① 验证 $(y+\tilde{x})$ 是解。

② 验证 x 是解时，$x=(x-\tilde{x})+\tilde{x}$，其中 $x-\tilde{x}$ 满足 $A(x-\tilde{x})=0$

几何：



$Ay=0$



$Ax=b$.

一些定义： 方程有解 $\Leftrightarrow$ 相容的 consistent
方程无解 $\Leftrightarrow$ 不相容 inconsistent
方程有唯一解 $\Leftrightarrow$ 确定的 definite

推论：① 相容的 $\Leftrightarrow$ # of pivots of $rref(A)$ = # of pivots of $rref(A, b)$

② 确定的 $\Leftrightarrow$ 相容 + # of pivots of $rref(A)$ = # of columns of A.

一些常用的关系：① # of pivots $\leq$ # of rows in A.
② # of columns of A = # of pivots + # of free unknowns

A $m \times n$

definite $\Rightarrow$ $m \geq n$.

或者 $n > m \Rightarrow Ax = 0$ 有无穷多组解.

定理：$m = n$ 时，$Ax = b$ 是否有唯一解只取决于 A，与 b 无关

证明：有唯一解 $\Leftrightarrow$ # of pivots $= m = n$.

例子：(Shafarevich-Remizov) Example 1.21

对 $c_1, \cdots c_r$ 互不相同的实数，$k_1, \cdots k_r$ 任意实数。

存在唯一的次数 $\leq r-1$ 多项式 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_{r-1} x^{r-1}$

使得 $f(c_1) = k_1$, $f(c_2) = k_2$, $f(c_r) = k_r$ (*)

证明：(*) 是关于 $a_0, a_1, \cdots a_{r-1}$ r 个未知元的

线性方程组。$A \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{r-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix}$

对于 $A \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{r-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow c_1, \cdots c_r$ 是 $f(x)$ 的根

$(x-c_1)(x-c_2) \cdots (x-c_r) \mid f(x) \Leftrightarrow f(x) = 0$

存在唯一解 $\Rightarrow$ (*) 有唯一解

类似的推导方法出现在 Example 1.22, 1.23 中，用非平凡的方法推出齐次方程解的唯一性。(值得阅读)

定义：# of pivots of A 定义为 A 的秩 (rank)

$\operatorname{rank}(A)$ 或者 $\operatorname{rk}(A)$